

СЕРЕДНЯ ОСВІТА
(за предметними спеціальностями)



 <https://doi.org/10.31651/2524-2660-2025-3-175-183>

 <https://orcid.org/0009-0003-7809-4270>

ІВАСЮК Оксана

вчителька математики,
Чернівецький ліцей №14
e-mail: o.myroniak06@gmail.com

 <https://orcid.org/0000-0003-1680-4479>

МИРОНИК Вадим

кандидат фізико-математичних наук, доцент катедри алгебри та інформатики,
Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича
e-mail: v.myronyk@chnu.edu.ua

УДК 372.851:51+373.5:51(045)

**ЕЛЕМЕНТИ ОРИГАМЕТРІЇ НА ФАКУЛЬТАТИВНИХ ЗАНЯТТЯХ З МАТЕМАТИКИ
У ЗАКЛАДАХ ЗАГАЛЬНОЇ СЕРЕДНЬОЇ ОСВІТИ**

У роботі розглядається взаємозв'язок між мистецтвом оригамі та математикою. Показано, як за допомогою складання паперу можна доводити геометричні теореми.

Наведено приклади побудов, які здійснюються не лише циркулем та лінійкою, а й шляхом згинання.

Методом оригамі отримано формули площ геометричних фігур. Такі підходи дозволяють глибше зрозуміти властивості фігур і процес побудов.

Зроблено акцент на практичне використання оригаметрії у шкільному курсі геометрії. Використання оригамі сприяє розвитку просторового мислення.

Ключові слова: оригаметрія, згин, пряма, бісектриса, перпендикуляр, трикутник, чотирикутник, точка.

Постановка проблеми. Річард Фейнман наголошував, що незнання математики обмежує здатність розуміти навколишній світ. І справді, математика розвиває критичне мислення та допомагає знаходити рішення навіть у найскладніших ситуаціях. Геометрія, зокрема, формує логіку, просторове уявлення та навички практичного застосування знань. Як показує практика, візуалізація навчального матеріалу значно покращує засвоєння геометричних методів розв'язання завдань. Звичайне пояснення «на словах» часто не дає бажаного ефекту, тому ефективнішим є підхід, коли учні самостійно створюють геометричні моделі. У процесі такого конструювання вони краще розуміють ключові поняття симетрії, рівності фігур, тривимірного простору, вчать мислити, доводити та відкривати. Надзвичайно дієвим інструментом у цьому стає мистецтво оригамі, яке дозволяє поєднати навчання з творчістю. Багатьом учням важко дається геометрія через

погану просторову уяву, тому інтеграція оригамі в навчальний курс математики – ефективний шлях до розвитку логіки, уваги, точності та конструкторських умінь. Складання паперу не тільки допомагає краще візуалізувати завдання, а й відкриває шлях до «оригаметрії» – науки, що поєднує геометрію та мистецтво, роблячи навчання наочним, цікавим та глибоким.

Мета статті полягає у вивченні та доведенні зв'язку мистецтва оригамі з математикою. Для здійснення зазначеної мети слугують наступні завдання:

- вивчити історію походження оригамі та оригаметрії;
- проаналізувати зв'язок оригамі і математики;
- показати практичне застосування оригамі в математиці;
- дослідити можливість використання оригамі для удосконалення геометричного мислення та доведення теорем;
- оцінити ефективність застосування оригамі для розвитку просторового мислення та навчальної мотивації учнів.

Огляд результатів, дотичних до теми статті. У науково-педагогічній літературі дедалі більше уваги приділяється інтеграції мистецтва оригамі до освітнього процесу, зокрема до навчання математики. Результати досліджень показують, що використання елементів оригаметрії на факультативних заняттях сприяє глибшому розумінню учнями властивостей геометричних об'єктів, розвитку просторової уяви, логічного мислення та навичок аналізу.

Вчені та практики відзначають, що моделювання геометричних фігур шляхом складання паперу активізує пізнавальну діяльність школярів, підвищує інтерес до

предмета, а також допомагає учням краще засвоювати матеріал за рахунок візуалізації геометричних фігур. Зокрема, встановлено, що оригамі можна ефективно використовувати для демонстрації симетрії, рівності фігур, властивостей кутів та побудови фігур без використання традиційних інструментів – циркуля та лінійки.

Досвід впровадження факультативів з оригаметрії в закладах освіти свідчить про позитивний вплив на навчальну мотивацію учнів та їх конструкторські здібності (Мироняк, 2023). Практика показує, що учні краще розуміють зміст теорем та формул, якщо вони мають змогу власноруч створити відповідну модель у вигляді фігури оригамі.

Таким чином, результати досліджень підтверджують ефективність використання елементів оригаметрії як інноваційного засобу навчання, що забезпечує інтеграцію мистецтва та науки, створюючи умови для гармонійного розвитку особистості учня.

У роботі (Захарійченко, Лозинська, 2021) висвітлено математичне обґрунтування конструкцій оригамі та доведення окремих геометричних теорем за допомогою складання паперу. Показано, що оригамі сприяє реалізації принципу наочності під час навчання, що допомагає у формуванні просторового і геометричного мислення, уяви, уваги, пам'яті, кмітливості та дрібної моторики.

Теоретичний аспект дослідження.

Факультативні заняття мають важливе значення у розвитку шкільної освіти, особливо в галузі математики. Вони відкривають можливості для вивчення нових тем і методів навчання, дозволяють експериментувати з матеріалом та регулювати його обсяг і складність. Для організації факультативів потрібна висока кваліфікація викладача, а іноді для проведення занять запрошують фахівців із університетів. Учні самі обирають факультативи, орієнтуючись на власні інтереси. Вимоги до учасників факультативних занять такі ж, як і до основних предметів: регулярне відвідування, виконання домашніх завдань і дисциплінованість.

Факультативний курс з математики складається з кількох тем, які можуть бути не завжди безпосередньо пов'язані одна з одною. Кожна з них сприяє поглибленому засвоєнню ключових понять і методів шкільної математики. Тому факультативні заняття мають бути тісно інтегровані з основним курсом математики. Для цього застосовують різні методичні прийоми: систематизацію матеріалу (коли факультативна тема вивчається після засвоєння відповідних розділів основного курсу) та поступове

викладання теорії (коли в основному курсі подаються початкові етапи теоретичних конструкцій, які ще не є узагальненими).

Основний курс математики служить джерелом тем і завдань для більш глибокої роботи на факультативі. Використання зв'язку між основним та факультативним курсами сприяє розвитку логічного мислення учнів, допомагаючи їм усвідомлювати різні способи опрацювання навчального матеріалу на різних етапах навчання. Форми проведення занять охоплюють лекції, практичні роботи та консультації. Основним видом занять є комбінований урок. Теоретичний матеріал подається у форматі коротких міні-лекцій, після яких учні виконують практичні завдання. Заняття організовуються з урахуванням індивідуальних особливостей учнів, їхнього темпу сприйняття та рівня засвоєння матеріалу. Математика – це не просто предмет у школі, а мова, що відкриває двері до критичного мислення, розв'язання проблем та інновацій. Для обдарованих учнів факультативні заняття з математики є потужним інструментом для реалізації їхнього інтелектуального потенціалу та розвитку навичок, які виходять далеко за межі шкільної програми. Такі курси дозволяють глибше зануритися у складні математичні концепції, виходячи за рамки стандартного навчального матеріалу, що стимулює учнів мислити логічно і розв'язувати складні задачі, розширюючи їхнє розуміння математики. Приймаючи виклики, долаючи труднощі і святкуючи успіхи, діти формують позитивне ставлення до навчання та набувають впевненості у власних силах для розв'язання складних задач.

Особливо важливою для пізнавальної активності та мотивації учнів є можливість самостійно виготовляти геометричні вироби та конструкції. Через практичну роботу з папером учні краще засвоюють такі поняття, як симетрія, рівність фігур тощо, а також вчаться аналізувати, обґрунтовувати й доводити властивості геометричних об'єктів. Крім того, робота з перегином паперу сприяє розвитку дрібної моторики та чутливості пальців, а координація двох рук покращує функціонування мозку.

Вивчення оригаметрії – науки, що поєднує геометрію з мистецтвом оригамі – допомагає учням усвідомити, що геометрія – це не лише навчальна дисципліна, а й творчість, краса й мистецтво. Це підвищує інтерес до предмету, розуміння його значення в житті та робить навчальний процес різноманітнішим.

Використання оригамі в навчанні геометрії – це цікавий та ефективний педагогічний підхід, який має низку переваг. По-

перше, оригамі допомагає учням конкретизувати абстрактні геометричні поняття: замість сухих теоретичних визначень вони можуть власноруч створювати фігури з паперу і через практику краще розуміти їхні властивості. По-друге, цей процес розвиває творчі здібності та моторику, адже складання фігур вимагає уважності, точності та координації рухів, що особливо корисно для тих учнів, які краще сприймають інформацію через практику.

Оригаметрія стимулює інтерактивне навчання, де діти активно залучені в процес, спільно працюють над проєктами, обговорюють і демонструють свої рішення, що сприяє не лише навчанню, а й розвитку соціальних навичок. Крім того, цей напрямок дозволяє побачити практичне застосування геометричних принципів у реальному житті – з паперу можна створювати моделі різних об'єктів і вивчати їхні геометричні властивості.

Загалом, оригаметрія робить вивчення геометрії привабливішим і цікавішим, адже учні мають можливість створювати унікальні вироби власноруч. Це стимулює якісне засвоєння математичних понять і сприяє розвитку різносторонніх навичок учнів.

У математиці оригамі розглядається як процес точного визначення розташування однієї чи кількох точок на аркуші, що використовуються для побудови необхідних згинів з метою створення певної моделі. Складання відбувається за чітко визначеною послідовністю дій, які ґрунтуються на математичних засадах. Положення точок задається через перетин ліній, а самі лінії утворюються краями аркуша паперу або вже наявними згинами. Кожен згин виконується шляхом точного суміщення певних елементів аркуша – ліній та точок. У результаті утворюється одна складка, при цьому модель залишається плоскою, а всі лінії мають строго геометричні властивості. В основу оригаметрії покладено наступні твердження.

1. Прямі – це краї аркуша та лінії згину, які утворюються при його складанні.

2. Точки – вершини кутів аркуша і точки перетинів ліній згину один з одним або ж з краями аркуша.

3. Основними поняттями оригаметрії є точка, лінія згину та квадратний аркуш паперу.

4. Основними відношеннями є лінія згину, яка проходить через точку, а точка належить лінії згину.

У 1992 році на слуханнях першої міжнародної конференції Origami Science and Technology японським математиком Хуміані Хузітою було запропоновано шість аксі-

ом, які привели до математичного обґрунтування побудов, що виконуються шляхом згину аркуша паперу.

Аксіома 1. Існує згин, що проходить через дві дані точки, причому він єдиний.

Аксіома 2. Існує згин, що суміщає дві дані точки і він є єдиним.

Аксіома 3. Існує згин, який суміщає дві дані прямі.

Аксіома 4. Існує згин, що проходить через дану точку і перпендикулярний до даної прямої, причому такий згин єдиний.

Аксіома 5. Існує згин, що проходить через дану точку і переводить іншу точку на дану пряму і такий згин єдиний.

Аксіома 6. Існує згин, що переміщує кожну з двох даних точок на одну із двох даних прямих, що перетинаються.

Аксіома 7. Існує лінія згину, яка перпендикулярна одній з двох даних прямих і поміщає дану точку на другу пряму згину, що перпендикулярна першій прямій і поміщає дану точку на другу пряму.

Останню аксіому у 2012 році сформулював японський майстер оригамі Коширо Хаторі, який стверджував, що можна розв'язати за допомогою методу оригамі завдання на побудову, які зазвичай виконуються з використанням креслярського трикутника, циркуля, лінійки і класичних креслярських інструментів.

Основні поняття оригаметрії близькі до термінів планіметрії: площа квадрата або аркуш паперу, лінія згину, точка перетину ліній згину, вершина квадрата, зашип на стороні, сторона, діагональ або середня лінія фігури. Вже в середині XIX століття німецький педагог Фрідріх Фребель запропонував включити до навчальної програми науку про оригаметрію, вивчаючи основи геометрії на прикладі фігур із паперу замість традиційних інструментів – циркуля і лінійки. Крім того, застосування оригамі у навчанні стимулює *розвиток у школярів просторового мислення*, уваги та моторики, що позитивно впливає на засвоєння складних геометричних понять.

Трансдисциплінарний аспект дослідження. У сучасній освітній парадигмі значна увага приділяється міждисциплінарній і трансдисциплінарній інтеграції, що сприяє формуванню цілісного уявлення про світ та розвиток універсальних навичок (Акірі, 2022). Одним із найефективніших підходів до такої інтеграції є концепції STEM (наука, технології, інженерія, математика) та STEAM (доповнення мистецтвом) (Закарлюка, 2023). Оригаметрія, як синтез геометрії та мистецтва складання паперу, природним чином вбудовується в цю систему і відкриває нові шляхи для формування компетентнісного підходу в освіті.

Інтеграція з інформатикою. Оригаметрія тісно пов'язана з алгоритмічним мисленням – основою навчання інформатики. Процеси складання фігур з паперу відповідають алгоритмам, де кожен крок визначень має чітку послідовність. Це дозволяє моделювати алгоритми не лише у вигляді коду, а й через маніпуляції з паперовими формами, що особливо ефективно для учнів з наочно-образним мисленням. Додатково використання цифрових платформ для моделювання згинань (наприклад, Origami Simulator) може стати містком між роботою руками та комп'ютерним моделюванням. Таким чином, оригаметрія сприяє розвитку навичок кодування, логіки та цифрової грамотності.

Зв'язок з фізикою. Оригамі-моделі мають не тільки геометричні, а й фізичні характеристики. Таким чином, оригаметрія не лише пов'язує математику та фізику, а й підводить учнів до елементів інженерного дизайну.

Орієнтація на мистецтво та дизайн. STEAM-підхід доповнює STEM мистецьким компонентом, що критично важливо для розвитку естетичного смаку, уяви та креативного мислення. Оригамі, як вид мистецтва, формує в учнів здатність до художнього мислення, композиційного бачення та акуратності. Робота з кольором, формою, симетрією сприяє не лише розвитку творчості, а й створює природне середовище для вивчення основ дизайну, що може мати подальше прикладне значення у сфері технологій, архітектури чи навіть програмування (інтерфейсний дизайн, геймдизайн тощо).

Однією з ключових переваг використання оригамі в освітньому процесі є його потенціал для гармонійного розвитку різних типів мислення – логічного, творчого та візуально-просторового. Через поєднання точності математичних дій та креативного підходу до створення моделей учні залучають різні когнітивні процеси, що робить оригаметрію універсальним інструментом для формування культури мислення.

Логічне мислення. В основі будь-якого згину в оригамі лежить чіткий алгоритм. Учень має виконати послідовність дій з урахуванням геометричних властивостей: розташування точок, симетрії, рівності відрізків, перпендикулярності, паралельності і т.ін.

Зазначимо, що під час складання фігури відбувається мимовільне опрацювання логічних операцій: аналізу, синтезу, класифікації, виведення висновків. Наприклад, при побудові перпендикуляра методом складання учень не просто механічно повторює дії, а шукає закономірності, визна-

чає причинно-наслідкові зв'язки між елементами фігури. Це активізує дедуктивне мислення та сприяє кращому засвоєнню логіки геометричних доведень.

Творчий підхід до розв'язання задач. Оригамі дозволяє відступити від стандартних способів доведення чи побудови. Це особливо важливо в умовах реформованої освіти, де ключовим є формування вміння мислити нестандартно. Наприклад, доведення теореми про суму кутів трикутника можна провести не лише кресленням, а й шляхом згину паперу, що дає можливість знайти нові підходи та поглянути на матеріал з іншого боку. Учні починають експериментувати з фігурами, перевіряти гіпотези, бачити варіативність рішень. Така діяльність формує дивергентне мислення – здатність генерувати кілька рішень однієї проблеми – що є важливим для творчої та професійної реалізації в майбутньому.

Візуально-просторове мислення. Значна частина учнів має труднощі із уявленням тривимірних об'єктів, симетрій, поворотів, перетворень. Оригамі якраз і вирішує цю проблему: у процесі складання учень безпосередньо бачить, як кути накладаються, сторони співпадають, як створюються об'ємні структури. Це особливо ефективно під час вивчення тем симетрії, многогранників, переміщень у просторі. Наприклад, при складанні куба або тетраедра з паперу учні набувають досвіду «реальної геометрії», що не завжди можливо в умовах класичної дошки чи підручника. Це сприяє формуванню міцного просторового уявлення – основи технічного, архітектурного та інженерного мислення.

Таким чином, використання оригаметрії в освітньому процесі виходить далеко за межі лише геометрії. Це міждисциплінарний інструмент, що поєднує точні науки, технології, мистецтво та педагогіку в єдину інтегровану систему, здатну гнучко адаптуватися до потреб сучасного учня.

Результати дослідження. Практичне застосування методу «оригаметричного підходу» в навчанні математики відкриває нові горизонти для ефективного засвоєння основних геометричних понять. Завдяки простим і водночас точним операціям зі згинання паперу, учні мають можливість наочно побачити та відчути властивості фігур, поєднуючи творчість із точністю математичних побудов.

Застосування елементів оригаметрії в процесі викладання математики вимагає від учителя не лише володіння методикою складання моделей, а й розуміння педагогічних принципів, на яких ґрунтується така форма роботи. Для того щоб інтеграція оригамі була дійсно результативною, доці-

льно дотримуватися певної методичної послідовності та враховувати особливості учнів.

Добір навчального матеріалу. Оригамі варто застосовувати до вивчення тих тем, що передбачають геометричні побудови, симетрію, властивості кутів, фігур та просторові уявлення. Доцільно починати з простих моделей, що потребують мінімальної кількості згинів, і поступово переходити до складніших. Важливо добирати ті фігури, які чітко ілюструють відповідне теоретичне поняття: діагоналі, медіани, бісектриси, середні лінії тощо.

Структура заняття з елементами оригаметрії передбачає використання комбінованого типу уроку, який включає:

- коротку міні-лекцію з поясненням теоретичного матеріалу;
- демонстрацію процесу складання моделі (учителем або за допомогою відео);
- практичну роботу учнів із поетапним повторенням дій;
- обговорення отриманих результатів;
- аналіз геометричних властивостей отриманої моделі;
- формулювання висновків та рефлексію.

Організація практичної діяльності. Для досягнення ефекту від застосування оригаметрії, важливо забезпечити учнів необхідними матеріалами (квадратні аркуші, інструкції, схеми). У класі варто організувати простір для демонстрації (наприклад, камеру чи проектор), аби кожен учень міг спостерігати за діями вчителя. Роботу необхідно проводити в парах або малих групах, що сприятиме співпраці та взаємонавчанню.

Інструктивний супровід. Для кращого засвоєння процесу складання бажано підготувати покрокові інструкції (у друкованому чи відеоформаті), у яких кожен етап буде супроводжуватись відповідним зображенням та описом. Особливо ефективними є вправи, в яких кожен згин має геометричне обґрунтування, а не лише декоративну функцію.

Диференціація навчання. Під час впровадження оригаметрії важливо враховувати індивідуальні можливості учнів. Для тих, хто швидко засвоює матеріал, можна запропонувати складніші моделі або додаткові завдання з обґрунтуванням властивостей здобутих фігур. Для учнів з труднощами – спростити моделі, використовуючи шаблони з наміченими лініями згину.

Поєднання з цифровими інструментами. Сучасний урок з елементами оригаметрії можна урізноманітнити використанням онлайн-ресурсів: відеоуроків, 3D-симуляторів складання, додатків для візуа-

лізації згинів (наприклад, Origami Simulator або Foldify). Це дозволяє продемонструвати модель у динаміці, а також адаптувати урок до змішаного чи дистанційного формату.

Формування рефлексії. По завершенню роботи з моделлю доцільно організувати обговорення: що виявилось складним, які геометричні властивості вдалося виявити, які висновки можна зробити.

Інтеграція у навчальну програму. Впровадження елементів оригаметрії можливе не лише на факультативних заняттях, а й в межах тем основного курсу геометрії. Наприклад, під час вивчення ознак паралельності прямих, властивостей чотирикутників, середніх ліній, симетрії, перетворень фігур. Також оригамі ефективно як засіб мотивації на початку теми або як узагальнення на її завершення.

Зважаючи на зазначену методичну послідовність, далі розглянемо конкретні приклади застосування оригамі на уроках геометрії та факультативних заняттях з математики.

Теорема 1. Внутрішні різносторонні кути при паралельних прямих, перетнутих січною, рівні.

Для доведення цієї теореми використаємо заготовку паперу у вигляді прямокутника. Його сторони виконуватимуть демонстрацію паралельних прямих.

Перегинаємо прямокутник по січній.

Склавши відповідним чином, показуємо, що різносторонні кути рівні.

Теорема 2. Діагоналі ромба перпендикулярні та є бісектрисами його кутів.

Щоб довести дану властивість, візьмемо паперову модель ромба, складемо його по діагоналях, бачимо, що утворилося чотири рівних трикутника, усі сторони ромба накладлись, аналогічно, накладлись кути, тому вони рівні, то діагональ є бісектрисою кута. Оскільки всі кути які утворились при перетині діагоналей рівні і їхня сума 360° , то на кожен кут припадає 90° .

Теорема 3. Якщо у прямокутному трикутнику один з гострих кутів дорівнює 30° , то протилежний цьому куту катет буде дорівнювати половині гіпотенузи.

Щоб провести дане доведення методом оригамі знадобиться прямокутний трикутник з кутом 30° . Перегнеммо аркуш паперу так, щоб катет, який лежить навпроти кута в 30° потрапив на гіпотенузу. Далі потрібно перегнути гіпотенузу. Таким чином можна побачити, що відрізки накладаються.

Теорема 4. Кут між бісектрисами суміжних кутів – прямий.

Беремо шаблон розгорнутого кута, проведимо промінь з вершини кута методом перегину, отримуємо суміжні кути. Прово-

димо бісектриси цих кутів аналогічно методом оригамі. Якщо ми з'єднаємо по перегінах, розгорнутий кут перетворюється на два рівних між собою кути, тому градусна міра кожного з них дорівнює.

Теорема 5. Медіана прямокутного трикутника, проведена до гіпотенузи, дорівнює половині гіпотенузи.

Беремо шаблон прямокутного трикутника, методом перегину проводимо медіану до гіпотенузи. Далі робимо перегин гіпотенузи через середину, бачимо, що її частина співпадає з медіаною, аналогічно перегинаємо другу частину. Отримуємо що всі три відрізки рівні. Значить справді медіана дорівнює половині гіпотенузи, тобто виходить, що катет, протилежний до кута 30° дорівнює половині гіпотенузи.

Теорема 6. Середня лінія трикутника паралельна протилежній стороні та дорівнює її половині.

Для доведення даної теореми знадобиться аркуш паперу у формі довільного трикутника. Методом перегину потрібно провести середню лінію трикутника. Далі побудувати пряму, перпендикулярну до основи трикутника та середньої лінії. Маємо, що дві прямі перпендикулярні до третьої, а це значить, що вони паралельні між собою. Потім потрібно показати, що середня лінія дорівнює половині протилежній стороні. Для цього проводиться ще перпендикуляр. При накладанні бачимо, що середня лінія і частина основи – рівні. Відрізок основи складається із двох частин, які при накладанні рівні a , отже, отримуємо, що середня лінія дорівнює половині основи.

Теорема 7. Вертикальні кути рівні.

Для початку обираємо початкову (вихідну) фігуру – квадрат. Виконуємо згини по діагоналях та згин через точку їх перетину. Складаємо фігуру так як показано на малюнку. Маємо два трикутники з однаковими кутами. Рівність цих кутів доведено накладанням.

Теорема Піфагора. У прямокутному трикутнику квадрат гіпотенузи дорівнює сумі квадратів двох катетів.

Беремо квадратний аркуш паперу і складаємо його навпіл, потім вертаємо у вихідне положення. Далі завертаємо кінці аркуша до середини і знову повертаємо назад. Кути квадрата складаємо у прямокутні трикутники по крайньому згину аркуша, розгинаємо. Знову складаємо кути в прямокутні трикутники, повертаємо у вихідне положення. Бачимо прямокутний трикутник, виділяємо його кольором. Далі будуюмо квадрати на катетах та гіпотенузі отриманого прямокутного трикутника (Візуалізація теореми Піфагора, 2022; Доведення теореми Піфагора, 2022). Потім накладан-

ням доводимо, що частинки квадратів співпадають.

Застосування оригамі до розв'язування задач.

Задача 1. Пряма, яка проходить через середину бісектриси BK $\triangle ABC$ і перпендикулярна до цієї бісектриси, перетинає сторону BC у точці F . Довести, що $FK \parallel AB$.

Беремо аркуш паперу, що має форму довільного трикутника. Проводимо бісектрису BK , зігнувши аркуш так, що сторона BC сполучилась зі стороною AB . Позначимо середину BK , з'єднавши точки B та K . Проведемо пряму DF , яка перпендикулярна BK . Зігнемо аркуш по лінії FK . Перегнем аркуш по прямій BK і сумістимо точки B та K . Отже, $FK \parallel AB$.

Задача 2. Поділити прямий кут на три рівні частини.

Для початку зробимо перегин, щоб побудувати серединний перпендикуляр до сторони кута, для цього суміщаємо сторону і робимо перегин, потім розгортаємо. Будемо прямою, яка буде проходити через вершину кута та серединний перпендикуляр. На даному етапі прямий кут поділився на дві частини. Далі суміщаємо сторони кута. Отримали, що кути накралась один на один. Таким чином ми поділили прямий кут на три рівні кути, кожен з яких має 30° .

Візуалізація виведення формул площі.

Формула площі трикутника $S = \frac{1}{2}ah$.

Для доведення спочатку візьмемо довільний трикутник зі стороною a та висотою h .

Робимо перегин трикутника по висоті. Далі перегином ділимо висоту навпіл і суміщаємо вершину трикутника до точки, що є основою висоти. Суміщаємо перегином інші вершини трикутника до основи висоти. Отримуємо два накладених один на

одного прямокутники зі сторонами $\frac{h}{2}$ та $\frac{a}{2}$.

Тоді використовуємо формулу для обчислення прямокутника, маємо

$$S_{mp} = 2S_{np} = 2 \cdot \frac{a}{2} \cdot \frac{h}{2} = \frac{1}{2}ah.$$

Формула площі паралелограма $S = ah$.

Трансформуючи паралелограм у прямокутник, наочно показуємо виведення формули для обчислення площі паралелограма через сторону і висоту. Робимо згин по висоті паралелограма. Ділимо висоту навпіл. Для цього перегнем горизонтальні сторони таким чином, щоб вони знаходились на одній прямій. Потім перегнем гострі кути паралелограма (один на лицьову сторону, а

інший – на зворотну). Таким чином отримуємо

$$S_{нар} = 2S_{пр} = 2 \cdot \frac{1}{2} ah = ah.$$

Формула площі ромба $S = \frac{1}{2} d_1 d_2$.

Початкова фігура – прямокутник. Робимо перегини через середини протилежних сторін. Відрізаємо і отримуємо ромб.

Суміщаємо вершини ромба до центру фігури, тобто до точки перетину діагоналей.

Отримаємо два рівні прямокутники зі сторонами $d_1/2$ $d_2/2$ і маємо, що

$$S_{ромба} = 2S_{пр} = 2 \cdot \frac{d_1}{2} \cdot \frac{d_2}{2} = \frac{1}{2} d_1 d_2.$$

Формула площі квадрата $S = \frac{1}{2} d^2$

Робимо згини по діагоналях квадрата. Отримуємо точку перетину діагоналей. Суміщаємо вершини квадрата до центру фігури. Отримуємо два рівних квадрати зі стороною $\frac{1}{2}d$. Використавши формулу для знаходження площі квадрата за стороною, маємо

$$S_{КВ} = 2S_{КВ_1} = 2 \cdot \left(\frac{d}{2}\right)^2 = \frac{1}{2} d^2.$$

Формула площі трапеції $S_{трап} = \frac{a+b}{2} h$.

Спочатку перегнемо трапецію так, щоб основи лягли одна на одну. Гострі кути перетинаються на лицевий бік. Утвориться прямокутник, звідки

$$S_{трап} = 2 \cdot \frac{a+b}{2} \cdot \frac{h}{2} = \frac{a+b}{2} h.$$

Поруч із класичними задачами, які розв'язуються із використанням методів оригаметрії також є і не зовсім класичні задачі.

Завдання 1. Побудова перпендикуляра з точки до прямої.

Мета: навчити учнів будувати перпендикуляр з точки до прямої без циркуля.

– Візьміть аркуш паперу (бажано квадратний).

– Намалюйте пряму (край аркуша чи згин).

– Позначте точку поза прямою.

– Складіть аркуш так, щоб точка потрапила на пряму, зробіть згин.

– Розгорніть папір – отримана лінія є шуканим перпендикуляром.

Варто наголосити учням на наступні нюанси:

а) чому цей згин гарантує перпендикулярність;

б) які властивості симетрії тут використовуються.

Завдання 2. Поділ трикутника на три рівновеликі частини.

Мета: навчити учнів використовувати симетрію для рівномірного поділу площі.

– Зігніть аркуш у формі довільного трикутника.

– Побудуйте медіани методом перегину (з'єднайте вершину із серединою протилежної сторони).

– Точка перетину медіан ділитиме трикутник на шість менших трикутників.

– Оберіть дві медіани, які ділять фігуру на три частини однакової площі.

Завдання 3. Побудова осевої симетрії для складної фігури.

Мета: навчити учнів виявляти та будувати вісь симетрії довільної фігури.

– Створіть із кольорового паперу фігуру (наприклад, стрілку або серце).

– Спробуйте скласти фігуру так, щоб частини співпали.

– Лінія згину – вісь симетрії.

– Перевірте результат, розгинаючи модель.

– Побудуйте дві осі симетрії для прямокутника, ромба або правильного шестикутника.

Завдання 4. Побудова правильного шестикутника методом складання.

Мета: сформувати навички побудови правильного многокутника без циркуля.

– Візьміть квадратний аркуш паперу.

– Зробіть згин по горизонталі та вертикалі, отримавши центр.

– Складіть аркуш у формі рівностороннього трикутника.

– Обертаючи згини, позначте вершини шестикутника.

– З'єднайте їх – отримано правильний шестикутник.

Завдання 5. Оригамі-головоломка: створення куба з однієї смуги паперу.

Мета: розвивати просторове мислення та розуміння тривимірних фігур.

– Виріжте довгу смугу паперу.

– Почніть складати її у формі літер Z і N, чергуючи напрямки.

– Зігніть кути так, щоб утворити квадратні грані.

– Закріпіть модель так, щоб утворився об'ємний куб.

Для учнів цікавими будуть наступні завдання: порахувати кількість граней, ребер і вершин; обчислити площу поверхні та об'єм (за заданими розмірами).

Як бачимо, методична організація заняття з елементами оригаметрії потребує ґрунтовної підготовки, але водночас відкриває широкі можливості для активізації пізнавальної діяльності, розвитку мислення та формування ключових компетентностей учнів. При правильному підході така методика не лише урізноманітнює навчання, а

й значною мірою підвищує його ефективність.

Для ефективного використання оригаметрії в навчальному процесі важливо враховувати рівень підготовки учнів. В одному класі можуть навчатися як діти з високим рівнем математичних здібностей, так і ті, хто потребує додаткової підтримки. У цьому контексті оригамі виступає як гнучкий дидактичний інструмент, який легко адаптується до індивідуальних потреб.

Учні з високим рівнем підготовки можуть виконувати складніші моделі, застосовувати оригамі для доведення теорем, які зазвичай вимагають аналітичного підходу. Наприклад, їм можна запропонувати скласти модель правильного многокутника, дослідити його симетрії або виконати геометричні побудови, які виходять за межі шкільного курсу (зокрема, розв'язання кубічних рівнянь методом Хузіти).

Учні з середнім або початковим рівнем можуть працювати з простими моделями, які не потребують багатого перегинів, але при цьому чітко ілюструють базові поняття. Так, при вивченні суміжних та вертикальних кутів можна використовувати моделі з одним або двома згинами. Такі вправи дозволяють швидко побачити результат, не втрачаючи мотивації.

Адаптація через формат роботи. Учні, яким важко працювати самостійно, можуть виконувати завдання в парах або групах, де кожен відповідає за певний етап: складання, аналіз, представлення результатів. Це не лише допомагає в подоланні труднощів, а й розвиває комунікативні навички.

Візуальна підтримка та шаблони. Для слабших учнів доцільно використовувати шаблони з наміченими лініями згину, покрокові інструкції з ілюстраціями, відеоматеріали. Водночас сильні учні можуть самостійно досліджувати, будувати та створювати інструкції для однокласників.

Отже, використання елементів оригаметрії сприяє розвитку ключових типів мислення та дозволяє організувати навчальний процес з урахуванням індивідуальних можливостей кожного учня. Завдяки простій формі подачі, водночас насиченій змістовністю, оригамі забезпечує одночасне розширення знань, навичок і формування позитивного ставлення до навчання.

Висновки і перспективи подальших досліджень. Проведене дослідження підтвердило доцільність і ефективність використання методу оригамі у процесі навчання геометрії. Оригамі не лише сприяє глибшому розумінню геометричних понять і закономірностей, але й розвиває просторо-

ву уяву, логічне мислення, уважність і креативність учнів. Застосування оригаметрії дає змогу здійснювати побудови, які неможливі при використанні лише циркуля та лінійки, що свідчить про ширші можливості цього підходу. Крім того, уроки з елементами оригамі активізують пізнавальну діяльність школярів і формують позитивну мотивацію до вивчення математики.

У майбутньому доцільно розширити тематику досліджень, зокрема:

- розробити повноцінну методiku впровадження оригаметрії в шкільний курс математики;

- створити добірки практичних завдань і вправ з використанням оригамі для різних тем геометрії;

- дослідити вплив оригамі на успішність учнів з різним рівнем математичної підготовки;

- вивчити можливості інтеграції оригамі в інші галузі знань, зокрема інформатику, дизайн та технології;

- організувати експериментальне навчання з елементами оригаметрії для визначення його ефективності в умовах сучасної освіти.

Таким чином, подальше дослідження оригаметрії як освітнього інструменту має значний потенціал для збагачення навчального процесу та підвищення якості математичної освіти.

Найкраще вводити елементи оригаметрії в сьомому класі, коли учні тільки розпочинають знайомитися з предметом «Геометрія». Опираючись на практичний досвід бачимо, що у наступних класах доцільно проводити заняття з елементами оригаметрії під час викладання наступних тем:

7 клас:

- 1.1. Точки і прямі
- 1.2. Відрізки та їх довжини
- 1.3. Кути та їх виміри
- 1.4. Суміжні та вертикальні кути
- 1.5. Паралельні та перпендикулярні прямі
- 1.6. Ознака паралельності прямих
- 1.7. Перпендикулярність прямих
- 1.8. Сума кутів трикутника
- 1.9. Рівність геометричних фігур
- 1.10. Рівнобедрений трикутник
- 1.11. Геометричне місце точок
- 1.12. Геометричні побудови

8 клас:

- 2.1. Види паралелограмів
- 2.2. Середня лінія трапеції

9 клас:

- 3.1. Побудова правильних многокутників
- 3.2. Переміщення
- 3.3. Центральна та осьова симетрія
- 3.4. Многогранники

Список бібліографічних посилань

- Акірі, 2022 – Акірі, І. (2022). Професійна підготовка майбутніх вчителів у контексті трансдисциплінарної парадигми. Вісник Черкаського національного університету імені Богдана Хмельницького. Серія «Педагогічні науки», 3: 52–55. Doi: <https://doi.org/10.31651/2524-2660-2022-3-52-55>.
- Візуалізація теореми Піфагора, 2022 – Візуалізація теореми Піфагора (2022). YouTube. URL: <https://youtu.be/ZCYib5uKTY>.
- Доведення теореми Піфагора, 2022 – Доведення теореми Піфагора методом оригамі (2022). YouTube. URL: <https://youtu.be/xsWr5E5Oit0>.
- Закарлюка, 2023 – Закарлюка, І.С. (2023). STEM-освіта: трансдисциплінарний підхід до вивчення природничо-математичних дисциплін. Матеріали міжнародної науково-методичної конференції «Проблеми математичної освіти» (ПМО – 2023) (м. Черкаси, 6-7 квітня 2023 р.). Черкаси: Вид. від. ЧНУ ім. Б. Хмельницького. С. 201-202.
- Захарійченко, Лозинська, 2021 – Захарійченко, Ю.О., Лозинська, О.М. (2021). Застосування японського мистецтва «орігамі» під час навчання геометрії. Постметодика, 1: 32–36.
- Мироняк, 2023 – Мироняк, О.М. (2023). Елементи оригаметрії на факультативних заняттях з математики в ЗСО. Матеріали міжнародної наукової конференції, присвяченої 55-річчю факультету математики та інформатики (28–30 вересня 2023 р.). Чернівці: Чернівецький нац. ун-т ім. Ю. Федьковича. С. 271–272.

References

- Akiri, I. (2022). Professional training of future teachers in the context of a transdisciplinary paradigm. *Bulletin of the Bohdan Khmelnytskyi National University of Cherkasy. Series "Pedagogical Sciences"*, 3: 52–55. Doi: <https://doi.org/10.31651/2524-2660-2022-3-52-55> [in Ukr.].
- Visualization of the Pythagorean Theorem. YouTube. URL: <https://youtu.be/ZCYib5uKTY> [in Ukr.].
- Proof of the Pythagorean Theorem Using Origami. YouTube. URL: <https://youtu.be/xsWr5E5Oit0> [in Ukr.].
- Zakariyucha, I.S. (2023). STEM education: a transdisciplinary approach to the study of natural and mathematical disciplines. In *Proceedings of the international scientific and methodological conference "Problems of mathematical education"* (PMO – 2023) (Cherkasy, April 6-7, 2023). Cherkasy: Publishing house of the B. Khmelnytskyi National University of Ukraine. Pp. 201–202 [in Ukr.].
- Zakharichenko, Y.O., Lozynska, O.M. (2021). Application of Japanese art "origami" in teaching geometry. *Postmetodyka*, 1(136): 32–36 [in Ukr.].
- Myroniak, O.M. (2023). Elements of origametry in optional mathematics classes in general secondary education institutions. In *Proceedings of the International Scientific Conference Dedicated to the 55th Anniversary of the Faculty of Mathematics and Informatics* (September 28–30, 2023) (pp. 271–272). Chernivtsi: Yuriy Fedkovych Chernivtsi National University [in Ukr.].

IVASIUK Oksana

mathematics teacher,
Chernivtsi lyceum №14

MYRONYK Vadym

associate Professor at the Department of Algebra and
Informatics, Yuriy Fedkovych Chernivtsi National University

ELEMENTS OF ORIGAMI IN OPTIONAL MATH CLASSES IN SECONDARY SCHOOLS

Summary. Introduction. The integration of visual aids in mathematics education significantly enhances students' understanding of abstract concepts. Origami, as a combination of art and geometry, serves as a powerful tool for visualizing and proving geometric theorems. The problem addressed in this paper is the lack of spatial reasoning and motivation among students when studying geometry using traditional tools.

Purpose. The aim of the article is to explore and justify the connection between the art of origami and mathematics. The study seeks to analyze the potential of origami in improving spatial thinking, illustrating geometric properties, and enhancing motivation to learn mathematics.

Methods. The research methodology involves theoretical analysis of literature, practical demonstration of origami-based constructions, experimental use of origami in math lessons, and comparison of traditional versus origami-based approaches to teaching geometry.

Results. The study demonstrates that origami can effectively visualize and prove geometric theorems, such as properties of angles, medians, bisectors, and diagonals. It also illustrates the derivation of area formulas for geomet-

ric figures using folding techniques. Origami activities enhanced students' logical, creative, and spatial thinking. Specific examples of classroom applications and adapted exercises for students of various levels are provided.

Originality. This paper introduces the concept of "origametry" – the fusion of origami and geometry – as a distinct educational approach. The authors highlight its interdisciplinary value within the STEM/STEAM framework and its applicability in teaching mathematics, physics, computer science, and design.

Conclusion. The research confirms that origami is an effective pedagogical method for teaching geometry. It increases students' interest, improves spatial reasoning, and fosters logical and creative skills. The authors recommend incorporating origami elements into geometry lessons starting from grade 7, along with methodological guidelines for differentiated instruction.

Keywords: origami; fold; line; bisector; perpendicular; triangle; quadrilateral; point.

Одержано редакцією 14 07 2025
Прийнято до публікації 28 07 2025